INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A IX-A

1. a) Suprafața unui nufăr se dublează în fiecare zi. După 40 de zile nufărul acoperă tot lacul. După câte zile nufărul acoperă jumătate din suprafața lacului ?

b) Există trei numere reale a,b,c care să fie simultan în progresie aritmetică și în progresie geometrică ?

Soluție.

a) Notăm u – suprafața inițială a nufărului 1p

Suprafața nufărului după prima zi este $2u$ 1p

Suprafața nufărului după a 40-a zi este $2^{40}u$ 1p

Nufărul acoperă jumătate din suprafața lacului după 39 de zile 1p

b) Fie numerele a,b,c în progresie aritmetică $\Rightarrow a, a+r, a+2r$ 0,5p

a,b,c în progresie geometrică $\Rightarrow a, qa, q^2a$ 0,5p

Pune condiția $\begin{cases} a+r=qa \\ a+2r=q^2a \end{cases}$ 1p

Finalizare, $r=0, q=1, a=b=c$ 1p

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2-2x+m,\ m\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox.

b) Pentru ce valori reale ale lui m graficul funcției f este situat deasupra axei Ox ? Dar sub axa Ox ?

c) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care dreapta de ecuație $y=2x+3$ intersectează graficul funcției f într-un singur punct.

Soluție.

a) $G_f \cap Ox \neq \Phi \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4-4m^2 \geq 0$ 1p

$4-4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4(1-m)(1+m) \geq 0 \Rightarrow m\in[-1,1]$ 1p

b) Graficul funcției este situat deasupra axei $Ox \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ 0,5p

$\Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow m\in(1,+\infty)$ 1p

Graficul funcției este situat sub axa $Ox \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ 0,5p

$\Rightarrow\begin{cases} m<0 \\ m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases} \Rightarrow m\in(-\infty,-1)$ 1p

c) Sistemul $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=mx^2-2x+m\end{cases}$ trebuie să aibă soluție unică $\Leftrightarrow mx^2-4x+m-3=0$ are soluție unică 1p

$\Delta=0\Rightarrow 16-4m(m-3)=0\Leftrightarrow 4-m^2+3m=0\Leftrightarrow m^2-3m-4=0\Rightarrow m\in\{-1,4\}$ 1p

3. La o fabrică de conserve s-a pierdut 6% din cantitatea de fructe după prima sortare, iar după a doua sortare s-a pierdut 2% din cantitatea rămasă după prima sortare. În final au rămas 184,24 tone de fructe. 12,5% din cantitatea bună de prelucrat se folosește pentru dulceață și cu 500% mai mult pentru gem.
a) Care este cantitatea de fructe destinată sortării ?
b) Ce cantitate de fructe rămâne după prepararea dulceței și a gemului ?

Soluţie.
Fie x cantitatea inițială de fructe.

a) După prima sortare rămân $\frac{94}{100}x$ 1p

După a doua sortare rămân $\frac{98}{100}\cdot\frac{94}{100}x$ 1p

$\frac{98}{100}\cdot\frac{94}{100}x=184,24$ tone $\Rightarrow x=200$ tone 2p

b) Pentru dulceață se folosesc $\frac{12,5}{100}\cdot 184,24=23,03$ tone fructe 1p

Pentru gem se folosesc $23,03+5\cdot 23,03=138,18$ tone fructe 1p

Cantitatea rămasă este $23,03$ tone fructe 1p

4. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g(x)=-2x+4$. Să se calculeze cosinusul unghiului format de graficele celor două funcții.

Soluţie.

$G_f\cap G_g=\{A\}, \begin{cases} y=x+1 \\ y=-2x+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=2\end{cases}, A(1,2)$ 1p

$G_f\cap Ox=\{B\}, \begin{cases} y=0 \\ y=x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=0\end{cases}, B(-1,0)$ 1p

$G_g\cap Ox=\{C\}, \begin{cases} y=0 \\ y=-2x+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=0\end{cases}, C(2,0)$ 1p

În triunghiul ABC: $AB=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$, $AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{3^2+0^2}=3$ 2p

Aplicăm teorema cosinusului în $\Delta ABC, \varphi=\sphericalangle BAC$:

$\cos\varphi=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{8+5-9}{2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{4\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 2p

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Un pătrat are două laturii de ecuaţii: $x+5y-17=0$ şi $5x-y-7=0$ şi o diagonală de ecuaţie $3x+2y+1=0$.

a) Să se determine coordonatele vârfurilor pătratului.
b) Să se scrie ecuaţiile celorlalte două laturi.
c) Să se calculeze aria pătratului.

Soluţie.

a) Fie $d_1: x+5y-17=0, d_2: 5x-y-7=0,\ d_1 \cap d_2 = \{A\} \Rightarrow A(2,3)$ 1p

Fie $d: 3x+2y+1=0, d \cap d_1 = \{B\} \Rightarrow B(-3,4)$ 1p

$d \cap d_2 = \{D\} \Rightarrow D(1,-2)$ 1p

$[AC],[BD]$ au acelaşi mijloc $M(-1,1)$ 1p

obţinem $C(-4,-1)$ 1p

b) $BC: 5x-y+19=0$ 0,5p

$DC: x+5y+9=0$ 0,5p

c) Determinăm lungimea laturii $AB=\sqrt{26}$ 0,5p

Calculăm aria $\mathcal{A}=26$ 0,5p

2. Considerăm dezvoltarea $\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, unde $y \in \mathbb{R}, y>0, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinaţi n pentru care coeficienţii termenilor de rang 1, 2 respectiv 3 ai dezvoltării formează o progresie aritmetică.
b) Pentru $n=8$ găsiţi termenii dezvoltării în care exponentul lui y să fie număr natural.

Soluţie.

a) $T_{k+1}=C_n^k\left(\sqrt{y}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2y^{\frac{1}{4}}}\right)^k = C_n^k y^{\frac{n-k}{2}-\frac{k}{4}} \cdot \frac{1}{2^k}$

Coeficienţii primilor trei termeni sunt: $C_n^0=1; C_n^1 \cdot \frac{1}{2}=\frac{n}{2}; C_n^2 \cdot \frac{1}{4}=\frac{n(n-1)}{8}$ 2p

Condiţia de progresie aritmetica este: $2 \cdot \frac{n}{2}=1+\frac{n(n-1)}{8} \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow n^2-9n+8=0 \Leftrightarrow n=1$ (nu convine) sau $n = 8$. 1p

b) $T_{k+1}=C_8^k\left(\sqrt{y}\right)^{8-k}\left(\dfrac{1}{2y^{\frac{1}{4}}}\right)^k=C_8^k y^{\frac{8-k}{2}}\cdot\dfrac{1}{2^k}\cdot y^{-\frac{k}{4}}=C_8^k\cdot\dfrac{1}{2^k}\cdot y^{\frac{16-3k}{4}}$ 1p

$\dfrac{16-3k}{4}\in\mathbb{N},\quad 0\le k\le 8, k\in\mathbb{N}\Rightarrow k\in\{0,4\}$ iar termenii T_1, T_5 .... 2p

3. Trei muncitori realizează împreună 2064 de piese. Primul muncitor realizează 140% din cantitatea pe care o realizează al doilea muncitor, iar 60% din cât realizează al doilea muncitor este cu 15% mai mult decât 25% din cât realizează al treilea muncitor. Câte piese are de realizat fiecare muncitor ?

Soluție.

Notăm a, b, c numărul de piese realizat de primul, al doilea respectiv al treilea muncitor.

$a+b+c=2064$ 1p

$a=\dfrac{140}{100}b$ 1p

$\dfrac{60}{100}b=\dfrac{15}{100}\cdot\dfrac{25}{100}c+\dfrac{25}{100}c$ 2p

$a=\dfrac{7}{5}b; c=\dfrac{48}{23}b\Rightarrow\dfrac{7}{5}b+b+\dfrac{48}{23}b=2064$ 1p

$a=644, b=460, c=960$ 2p

4. Să se rezolve pe domeniul maxim de definiție ecuațiile:

a) $\log_3\left(\log_4\left(x^2-17\right)\right)=1$

b) $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$

Soluție.

a) Condițiile de existență $\begin{cases} x^2-17>0 \\ \log_4\left(x^2-17\right)>0 \end{cases}\Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow x^2-17>1\Rightarrow x\in\left(-\infty,-3\sqrt{2}\right)\cup\left(3\sqrt{2},+\infty\right)$ 1p

Ecuația este echivalentă cu $x^2-17=64\Rightarrow x=\pm 9$ 1p

$-9, 9\in\left(-\infty,-3\sqrt{2}\right)\cup\left(3\sqrt{2},+\infty\right)$ 1p

a) Aducem ecuația la forma $3^{2x}-10\cdot 3^x+9=0$ 1p

Notăm $3^x=t, t>0$ 0,5p

Rezolvăm ecuația $t^2-10t+9=0$ 0,5p

Soluțiile $x=0$ sau $x=2$ 1p

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. La o stație meteorologică sunt înregistrate temperaturile dimineața, la prânz și seara. S-a constatat că la prânz temperatura este cu 30% mai mare decât dimineața, iar seara se înregistrează o scădere cu 20% a temperaturii față de prânz. Se știe că diferența de temperatură dintre seară și dimineață este de un grad.
a) Să se calculeze cele trei temperaturi măsurate.
b) Cu cât la sută s-a mărit temperatura seara față de dimineața.

Soluție.

Dacă x este temperatura de dimineață, la prânz va fi $\frac{13x}{10}$, iar cea de seara $\frac{26x}{25}$
.... 2p
$x = 25^0 C$ 1p
Temperaturile vor fi: $25^0 C; 32{,}5^0 C$ și respectiv $26^0 C$ 2p
Temperatura de seara este cu 4% mai mare decât dimineața 2p

2. Seria statistică următoare reprezintă numărul de tablete vândute de o firmă într-o lună, luând ca valori clasele ce reprezintă prețul lor în euro.

Preț (euro)	[40;80)	[80;120)	[120;160)	[160;200)	[200;240)	[240;280]
Număr de tablete	50	70	90	100	50	40

a) Calculați prețul mediu al unei tablete vândute de firmă și aflați clasa mediană.
b) În luna următoare numărul de tablete vândute crește sau scade cu același procent în fiecare clasă. Care sunt clasele cu creșteri de vânzări astfel încât numărul total de tablete vândute este același?

Soluție.

a) Prețul mediu este $m = (60\cdot 50 + 100\cdot 70 + 140\cdot 90 + 180\cdot 100 + 220\cdot 50 + 260\cdot 40) : 400 = 155$
.... 1p

Tabloul frecvențelor cumulate crescător este

Preț	[40;80)	[80;120)	[120;160)	[160;200)	[200;240)	[240;280]
Număr de tablete	50	70	90	100	50	40
Frecvența cumulată crescător	50	120	210	310	360	400

.... 1p
Clasa mediană este intervalul $[120;160)$ 1p
b) Dacă $p\%$ este procentul de creștere sau descreștere,

obținem $\frac{p}{100}(\pm 50 \pm 70 \pm 90 \pm 100 \pm 50 \pm 40) = 0$ 1p
Convenabil este +50 – 70 – 90 + 100 + 50 – 40 = 0 sau – 50 +70 + 90 – 100 – 50 + 40 = 0
.... 2p
Creșteri în prima, a patra și a cincea clasă sau în a doua, a treia și a șasea clasă 1p

3. Într-o regiune, fiecare dintre cele n orașe existente este legat în mod direct, prin căi ferate, de exact alte trei 3 orașe, astfel încât traseul minim ce pleacă dintr-un oraș A și se întoarce tot în A conține 4 legături directe.
a) Determinați numărul minim de orașe care pot fi legate astfel.
b) În condițiile problemei, este posibil să avem 9 orașe?

Soluție.
a) Asociem problemei graful G ale cărui vârfuri sunt cele n orașe și muchiile sunt legăturile directe de căi ferate.
Dacă x_1 este vârf al lui G, notăm cu x_2, x_3, x_4 vârfurile adiacente cu el. Vârfurile x_2, x_3, x_4 nu sunt adiacente două câte două, altfel ar exista un ciclu elementar(traseu) de lungime 3 .... 2p
x_2 va fi adiacent și cu alte două orașe x_5 și x_6 .... 1p
x_3 și x_4 vor fi și ele adiacente cu x_5 și x_6 .... 1p
Numărul minim de orașe este 6 .... 1p
b) $3 \cdot 9 = 2m$, unde m este numărul de muchii 1p
Nu este posibil 1p

4. Un graf-turneu este un graf orientat complet astfel încât între oricare două vârfuri distincte x și y există unul și numai unul dintre arcele (x, y) sau (y, x). Pentru un graf-turneu cu n vârfuri $x_1, x_2, ..., x_n$ notăm cu r_i numărul arcelor care intră în x_i și cu s_i numărul arcelor care ies din x_i.
a) Justificați că: $r_1 + r_2 + ... + r_n = s_1 + s_2 + ... + s_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
b) Arătați că: $r_1 r_2 + r_1 r_3 + ... + r_1 r_n + r_2 r_3 + ... + r_{n-1} r_n = s_1 s_2 + s_1 s_3 + ... + s_1 s_n + s_2 s_3 + ... + s_{n-1} s_n$.

Soluție.
a) Un graf complet cu n vârfuri are $\frac{n(n-1)}{2}$ arce 1p
Fiecare arc al grafului este numărat o dată ca arc de intrare într-un vârf și o dată ca arc de ieșire din alt vârf, deci sumele sunt egale cu numărul de arce ale grafului 1p
b) Graful-turneu este complet, deci $r_i + s_i = n - 1$ pentru orice $i = \overline{1,n}$. 1p
$r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2 = (n-1-s_1)^2 + (n-1-s_2)^2 + ... + (n-1-s_n)^2 =$ 1p
$= n(n-1)^2 - 2(n-1)(s_1 + s_2 + ... + s_n) + s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2 = s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2$ 1p
$(r_1 + r_2 + ... + r_n)^2 = (s_1 + s_2 + ... + s_n)^2$ 1p
Deci, $r_1 r_2 + r_1 r_3 + ... + r_1 r_n + r_2 r_3 + ... + r_{n-1} r_n = s_1 s_2 + s_1 s_3 + ... + s_1 s_n + s_2 s_3 + ... + s_{n-1} s_n$. 1p

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie X o matrice pătratică de ordinul al doilea, cu elemente numere reale, care verifică ecuația $X^2 + X - A = O_2$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $X = A$ verifică ecuația din enunț.

b) Arătați că $(2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

c) Determinați toate soluțiile ecuației din enunț.

Soluție.

a) $X^2 = O_2$ 2p
Finalizare 1p

b) $X^2 + X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 4X^2 + 4X = \begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4X^2 + 4X + I_2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ 2p

c) Notăm $2X + I_2 = Y$, de unde $Y^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. Căutăm $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1p

$Y = \begin{pmatrix} \pm 3 & \pm 8 \\ \mp 2 & \mp 5 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 1p

2. Într-un sistem de axe carteziene xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,2)$ și $B_n\left(\frac{2n}{n^2+1}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{Z}$.

a) Determinați aria triunghiului OAB_1.

b) Determinați ecuația dreptei AB_{-1}.

c) Pot fi coliniare punctele B_0, B_1, B_n? Justificați răspunsul!

Soluție.

a) Aria este 1 .... 2p
b)Ecuația dreptei este $2x - 3y + 2 = 0$ 2p

c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{2n}{n^2+1} & \frac{n^2-1}{n^2+1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2n^2-2n}{n^2+1}$ 1p

$\frac{2n(n-1)}{n^2+1} \neq 0$, pentru orice n număr întreg, $n \neq 0$, $n \neq 1$ 1p

Punctele B_0, B_1, B_n nu sunt coliniare 1p

3. Pe mulțimea numerelor reale considerăm legea de compoziție asociativă "$\circ$" definită prin $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice x, y numere reale.

a) Determinați elementul neutru al acestei legi.

b) Arătați că $\underbrace{x \circ x \circ ... x}_{2016} = (x-6)^{2016} + 6$.

c) Determinați numerele reale x care verifică ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2016} = x^2 - 12x + 42$.

Soluție.

a) Dacă notăm cu e elementul neutru, atunci avem $x \circ e = x$, pentru orice x număr real.

Obținem $e = 7$ 2p

Verificăm că $7 \circ x = x$, pentru orice x număr real 1p

b) Demonstrăm prin inducție matematică $\underbrace{x \circ x \circ ... x}_{n} = (x-6)^n + 6$, pentru orice număr întreg n,

$n \geq 2$ 2p

c) De la punctul b) avem $\underbrace{x \circ x \circ ... x}_{2016} = (x-6)^{2016} + 6$. Obținem $(x-6)^{2016} = (x-6)^2$ 1p

de unde $x_1 = 6$, $x_2 = 7$ și $x_3 = 5$ 1p

4. Printre elementele unei matrice cu 4 linii și 4 coloane există 4 litere, astfel încât se află o singură literă pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe fiecare dintre cele două diagonale. Câte soluții există, dacă cele 4 litere sunt identice? Dar dacă sunt diferite? Justificați răspunsul!

Soluție.

Cu litere identice, plasăm o literă pe diagonala principală a matricei. Din cele 4 elemente de pe diagonala secundară, unul este pe aceeași coloană iar altul este pe aceeași linie cu litera plasata pe diagonal principala. A doua literă poate fi plasată în locul unuia dintre celelalte două elemente. 2p

Observăm că ultimele 2 litere pot fi plasate ,de exemplu,cum este arătat mai jos:

$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & a \\ * & a & * & * \end{pmatrix}$ 1p

Din moment ce prima literă poate fi unul din oricare cele 4 elemente de pe diagonala principală și a doua oricare dintre cele 2 elemente de pe diagonala secundară, există $4 \cdot 2 = 8$ soluții 2p

4 litere diferite duc la aceleași 8 alegeri de elemente, dar pentru oricare alegere există $P_4 = 24$ moduri pentru a pune literele. Deci există $8 \cdot 24 = 192$ soluții. 2p